# PROBLEMA DE VALOR INICIAL: MODELAGEM, MÉTODO DE RESOLUÇÃO E RESULTADOS COMPUTACIONAIS

Carla Nascimento Neves[1]
Kennedy Morais Fernandes[2]

## RESUMO

Os fenômenos que acontecem no mundo físico muitas vezes são modelados por problemas de valor inicial, onde a informação inicial conhecida é propagada para o interior do domínio por meio de uma equação diferencial. Como nem sempre esses problemas podem ser resolvidos analiticamente, métodos numéricos para soluções aproximadas são utilizados. O objetivo deste trabalho é utilizar o método de *Euler* para a resolução de um problema de valor inicial (PVI). Para isso, foi usado como PVI um problema que aborda a mistura de fluidos. Após a apresentação do modelo matemático do problema proposto e sua resolução analítica, descrevemos a formulação matemática do método de *Euler*, juntamente com sua implementação computacional. As soluções aproximadas obtidas pelo método numérico e a sua solução analítica do problema são apresentadas, criando a partir delas, comparações que investigam a eficiência da aproximação do método numérico para soluções aproximadas das equações diferenciais ordinárias. Assim, ao longo do trabalho foram aprofundados os conhecimentos adquiridos sobre derivadas, integração, modelos computacionais e técnicas de programação, além, é claro, da apresentação dos resultados adquiridos a partir da implementação computacional do método de *Euler*, sendo este o começo para futuras experiências investigativas no campo da resolução de problemas com a matemática.
**Palavras-chave:** Método de Euler; Equação Diferencial Ordinária; Problema de Valor Inicial.

## INTRODUÇÃO

Como demonstrado por Valle (2012) e Nóbrega (2016), muitos dos acontecimentos da natureza acontecem segundo relações que envolvem taxas de variação, frequentemente eles são descritos através de equações diferenciais, que são equações funcionais que compreendem derivadas. Quando a equação diferencial envolve uma função desconhecida com uma única variável independente e suas derivadas até certa ordem, ela é chamada de Equação Diferencial Ordinária (EDO), cuja ordem é a mesma de sua maior derivada.

Na abordagem numérica para a resolução de EDO's de primeira ordem são utilizados métodos numéricos que podem ser implementados de forma computacional, aproximando soluções

[1]Discente do curso Bacharelado Interdisciplinar em Ciências - UFSB. E-mail: carlanascimentoneves@gmail.com
[2]Professor Doutor em Modelagem Computacional na Universidade Federal do Sul da Bahia. E-mail: *kennedy.fernandes@gmail.com*

para o problema de valor inicial (PVI). Esta resolução pode ser definida geometricamente em algum intervalo I, tal que a função passe por um ponto $(x_0, y_0)$, determinando que

$$\frac{dy}{dx} = (x, y), \tag{1}$$

com condição inicial $y(x_0) = y_0$. Um desses métodos numéricos é o método de Euler, também conhecido como método da tangente, elaborado pelo matemático e físico suíço Leonhard Euler (1707-1783) por volta de 1768, que aplica a ideia de que uma reta tangente pode ser usada para aproximar os valores de uma função em uma pequena vizinhança do ponto de tangência.

O objetivo deste trabalho é mostrar a eficiência do método de Euler para a obtenção de soluções aproximadas do problema de mistura de fluidos que é modelado matematicamente por um PVI (equação diferencial de primeira ordem e uma condição inicial).

## METODOLOGIA

Neste trabalho utilizamos um problema de mistura de fluidos (ZILL e CULEN, 2003, p.110):

- Inicialmente, 50 gramas de sal são dissolvidas em um tanque contendo 300 litros de água. Uma solução salina é bombeada para dentro do tanque a uma taxa de três litros por minuto, e a solução bem misturada é então drenada na mesma taxa. Se a concentração da solução que entra é 2 gramas por litro, determine a quantidade de sal no tanque em diferentes momentos.

Seja a(t) a quantidade de sal (em gramas) no tanque no instante t. Para problemas desse tipo, a taxa de variação de a(t) é dada por:

$$\frac{da}{dt} = (\text{taxa de entrada do sal}) - (\text{taxa de saída do sal}) = R_1 - R_2 \tag{2}$$

As taxas de entrada e saída do sal estão representadas, respectivamente por $R_1$ e $R_2$.

$$R_1 = (3\ l/min) * (2g/l) = 6g/m \qquad R_2 = (3\ l/min) * \left(\frac{a}{300}\ l/g\right) = \frac{a}{100}\ l/min$$

Com isso, o PVI com a condição inicial a(0) = 50, tem a seguinte EDO de primeira ordem:

$$\frac{da}{dt} = 6 - \frac{a}{100}. \tag{3}$$

Para resolução deste problema, a partir de uma técnica analítica, utilizamos o fator de integração $e^{t/100}$. Com isso, temos: $\frac{d}{dt}\left[e^{t/100}a\right] = 6e^{t/100}$.

(4)

Integrando os dois lados da equação e isolando a variável obtemos: $a = 600 + ce^{t/100}$

Com a condição inicial a=0, t=50, encontramos c = -550. Assim, finalmente se obtém:

$$a = 600 - 550e^{t/100} \quad (5)$$

Para a solução numérica desta EDO (Equação 3), utilizamos o método de Euler, que funciona basicamente da seguinte forma: Seja a EDO de primeira ordem $a' = f(t, a)$, sujeita à condição inicial $a(t_0) = a_0$, temos:

$$\frac{da}{dt}(t_0, a_0) = f(t_0, a_0) \rightarrow \frac{a - a_0}{t - t_0} = f(t_0, a_0). \quad (6)$$

A equação da reta a no ponto $f(t_0, a_0)$, onde $h = t_1 - t_0$ é dada por:

$$a = a_0 + h * f(t_0, a_0). \quad (7)$$

O incremento h representa o tamanho do passo da equação. Se h tende à zero, a tende a $a_1$.

$$a_1 = a_0 + hf(t_0, a_0). \quad (8)$$

Se generalizarmos a equação anterior, então teremos:

$$a_i = a_{i-1} + hf(t_i, a_i). \quad (9)$$

Substituindo na Equação 9 a função f da EDO (Equação 3), teremos:

$$a_i = a_{i-1} + hf\left(600 - 550e^{\frac{t}{100}}\right). \quad (10)$$

Para apresentar através do método de Euler a quantidade de sal no tanque em diferentes instantes de tempo, descrevemos a implementação computacional deste método, a partir dos Algoritmos 1 (função f – Equação 3), Algoritmo 2 (solução analítica - Equação 5) e Algoritmo 3 (função principal da implementação computacional).

**Algoritmo 1 – Função f (real t, real a)**

**1:** $\mathbf{f \leftarrow 6 - \frac{a}{100}}$

**2: retorna f**

**Algoritmo 2 – Função Analítica (real t)**

**1: Analítica ←** $\mathbf{600 - 550e^{t/100}}$

**2: retorna Analítica**

**Algoritmo 3 – Função Principal**

- **1: real** $\mathbf{t_0,\ a_0, h, t, a,\ t_{fim}}$
- **2: inteiro** $\mathbf{n, i \leftarrow 0}$

- $\mathbf{3: leia\ t_0,\ a_0, t_{fim}, h}$
- $\mathbf{5: n \leftarrow \frac{t_{fim}-t_0}{h}}$
- $\mathbf{6: t \leftarrow t_{fim}}$
- $\mathbf{7: a \leftarrow a_0}$
- $\mathbf{8: imprima\ i, t, a, Analítica(t)}$
- $\mathbf{9: para\ (i \leftarrow 1; i \leq n; i \leftarrow i+1)\ faça}$
- $\mathbf{10: \quad a \leftarrow a + h * f(t, a)}$
- $\mathbf{11: \quad \boldsymbol{t \leftarrow t + h}}$
- $\mathbf{12: \quad imprima\ \boldsymbol{i, t, a, Analítica(t)}}$
- $\mathbf{13: fim\ para}$

**RESULTADOS**

A Figura 1 apresenta o gráfico com as soluções numéricas obtidas com diferentes incrementos ($h$'s iguais a 0,5, 0,2 e 0,1) e com a solução analítica. Percebendo-se que quanto menor o tamanho do incremento, mais a solução numérica se aproxima da solução analítica.

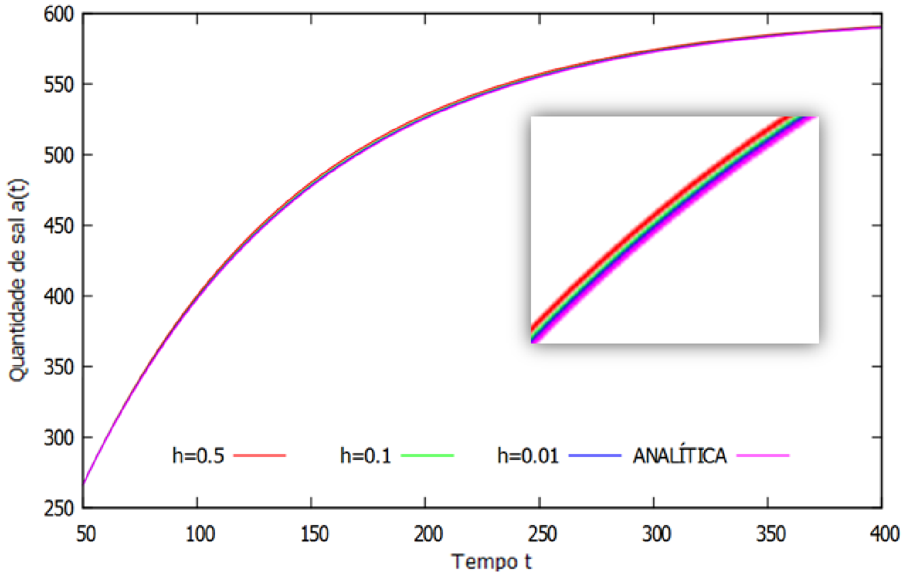


Figura 1: Gráfico comparativo entre as soluções. Em destaque: zoom de um intervalo de tempo.

Resultados numéricos são apresentados para alguns pontos do domínio, nas Tabelas 1, 2 e 3, para os três valores de h's. As tabelas mostram os valores de $t_i$ que foram utilizados, as soluções aproximadas $a_i$, o valor obtido analítico na Equação 5 e o erro absoluto.

Tabela 1: Tabela comparativa para $h$ = 0,5

| $t_i$ | $a_i$ | Valor analítico de $a(t)$ | Erro Absoluto |
|---|---|---|---|
| 100 | 397,919912 | 397,666307 | 0,253605 |
| 200 | 525,845131 | 525,565594 | 0,279537 |
| 300 | 572,788291 | 572,617112 | 0,533142 |
| 400 | 590,014450 | 589,926399 | 0,088051 |

Tabela 2: Tabela comparativa para $h$ = 0,1

| $t_i$ | $a_i$ | Valor analítico de $a(t)$ | Erro Absoluto |
|---|---|---|---|
| 100 | 397,716918 | 397,666307 | 0,050611 |
| 200 | 525,621436 | 525,565594 | 0,055842 |
| 300 | 572,651342 | 572,617112 | 0,106453 |
| 400 | 589,944024 | 589,926399 | 0,017625 |

Tabela 3: Tabela comparativa para h = 0,01

| $t_i$ | $a_i$ | Valor analítico de $a(t)$ | Erro Absoluto |
|---|---|---|---|
| 100 | 397,671366 | 397,666307 | 0,005059 |
| 200 | 525,571177 | 525,565594 | 0,005583 |
| 300 | 572,620535 | 572,617112 | 0,010642 |
| 400 | 589,928161 | 589,926399 | 0,001762 |

Comparando as tabelas apresentadas e a Figura 1, podemos concluir que quando $h \to 0$ então $a_i \to a$, sendo a é a solução exata do PVI, obtido pela Equação 5. Portanto, quando $h \to 0$, a solução numérica converge para a solução exata.

## CONCLUSÃO

Nesse trabalho foi utilizado o método numérico de Euler para encontrar a solução de um problema de valor inicial, constituído de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem e uma condição inicial. Os resultados numéricos são comparados com a solução exata do PVI e mostram que o método de Euler é um método estável e serve como uma opção para resolução de problemas de valor inicial com equações diferenciais ordinárias.

O método de Euler é somente uma dentre muitas maneiras pelas quais uma solução de uma equação diferencial pode ser aproximada. A grande vantagem desse método é a sua simplicidade, mas mesmo assim é pouco utilizado na maioria dos trabalhos científicos apresentados na literatura. O método de Euler se caracteriza como um método de *Runge-Kutta* de 1ª ordem (LOPES e RUGGIERO, 1998), portanto é menos preciso que os métodos numéricos de 2ª, 3ª e 4ª ordem.

## REFERÊNCIAS

LOPES, Vera Lúcia da Rocha; RUGGIERO, Márcia A. Gomes. **Cálculo numérico-Aspectos teóricos e computacionais.** 1988.

NÓBREGA, Danielle Dantas**. Equações diferenciais ordinárias e algumas aplicações**. 2016.

VALLE, Karine Naiara F.. **Métodos Numéricos de *Euler* e *Runge-Kuta*.** Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática para Professores com Ênfase em Cálculo da UFMG. Belo Horizonte, Brasil, 2012.

ZILL, Dennis G; CULLEN, Michael R.. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**. Cengage Learning Editores, 2003.